



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 04116

1º semestre de 2015

Prof. Jürgen Stilck

Solução da 2ª Prova

Questão 1

a) Temos:

$$S(U, N) = Ns(u) = NR \left[\left(1 + \frac{U}{Nu_0} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{Nu_0} \right) - \frac{U}{Nu_0} \ln \frac{U}{Nu_0} \right].$$

b) Derivando a entropia molar:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{R}{u_0} \left[\ln \left(1 + \frac{u}{u_0} \right) - \ln \frac{u}{u_0} \right] =$$
$$\frac{R}{u_0} \ln \left(\frac{u_0}{u} + 1 \right).$$

c) Invertendo a equação de estado, obtemos:

$$\frac{u_0}{u} + 1 = \exp \left(\frac{u_0}{RT} \right),$$

o que leva a:

$$u = \frac{u_0}{\exp \left(\frac{u_0}{RT} \right) - 1}.$$

Vemos que, quando $T \ll \frac{u_0}{R}$ teremos $u \rightarrow 0$ e quando $T \gg \frac{u_0}{R}$ teremos $u \approx RT \rightarrow \infty$.

d) Como vimos no item anterior, quando $T \rightarrow 0$ a energia interna se anula, o que implica que a entropia também tende a zero (note, por L'Hospital, que $\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = 0$).

Questão 2

a) Da expressão, vem:

$$[A] = [U][V]^{1/3}[S]^{-4/3} = Nm.m.K^{4/3}.N^{-4/3}.m^{-4/3},$$

ou seja,

$$[A] = \left(\frac{K^4 m^2}{N} \right)^{1/3}.$$

b) Da equação fundamental, vem:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \frac{4A}{3} \left(\frac{S}{V} \right)^{1/3}.$$

Invertendo, temos:

$$S = V \left(\frac{3T}{4A} \right)^3,$$

o que nos permite realizar a transformada de Legendre:

$$F(T, V) = U - TS = \frac{A}{V^{1/3}} \left(\frac{3T}{4A} \right)^4 \cdot V^{4/3} - T \left(\frac{3T}{4A} \right)^3 V,$$

o que leva a:

$$F = \left[\left(\frac{3}{4} \right)^4 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] \frac{VT^4}{A^3} = -\frac{9}{256} \frac{VT^4}{A^3}.$$

c) Temos: $F = U - TS$, logo $dF = -S dT - p dV$, para N constante. Num processo isotérmico $dT = 0$, de maneira que nesse caso $dF = -p dV = -dW$.

d) Usando os resultados anteriores, vem:

$$W = -\Delta F = \frac{9}{256} \frac{T_1^4}{A^3} (V_2 - V_1).$$

Questão 3

a) Temos a igualdade das derivadas mistas:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial u},$$

ou seja:

$$\left(\frac{\partial(1/T)}{\partial v}\right)_u = \left(\frac{\partial(p/T)}{\partial u}\right)_v.$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{T}\right)_v = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R}{v-b} - \frac{a}{v^2} \frac{1}{T}\right)_v = -\frac{a}{v^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{T}\right)_v,$$

então

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{T}\right)_v = -\frac{v^2}{a} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{T}\right)_u = -\frac{v^2}{a} \frac{\partial}{\partial(a/v)} \frac{\partial(a/v)}{\partial v} \left(\frac{1}{T}\right)_u,$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{T}\right)_v = \frac{\partial}{\partial(a/v)} \left(\frac{1}{T}\right)_u.$$

c) De fato, vemos que:

$$\frac{\partial}{\partial(a/v)} \left(\frac{1}{T}\right)_u = -\frac{cR}{(1+a/v)^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{T}\right)_v.$$

Substituindo $1/T$ na equação do item b), obtemos a equação de estado na representação da entropia:

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{v-b} - \frac{acR}{uv^2 - av}.$$